

# Uma aplicação da busca tabu para o problema de carregamento no transporte de carga parcelada

Marcos Roberto Silva<sup>1</sup> e Claudio Barbieri da Cunha<sup>2</sup>

**Resumo:** Este trabalho trata do problema de carregamento em redes de distribuição de carga parcelada. O mesmo consiste na definição dos fluxos de cargas desde seus terminais de origem até seus destinos, tendo como principal dado adicional de entrada uma rede de transporte com uma estrutura similar a uma rede *hub-and-spoke*. Mais especificamente, o problema trata do planejamento dos carregamentos a serem realizados em cada um dos terminais levando-se em conta cada uma das cargas que devem ser transportadas, definindo-se o caminho que cada despacho deve percorrer até chegar ao seu destino. Esse problema é modelado matematicamente e, dada a dificuldade para solução de problemas de tamanho igual ao encontrado na prática, é proposta uma heurística baseada em busca tabu para sua solução. Experimentos computacionais mostram que a heurística proposta permite resolver de forma eficiente instâncias reais de uma empresa transportadora no Brasil.

*Palavras-chave:* projeto de rede, transportadora de carga parcelada, busca tabu.

**Abstract:** This work deals with the cargo loading problem in the context of distribution networks for less-than-truckload (LTL) trucking company. It consists of determining the flows of LTL freights from their origins to the destination terminals, seeking for a minimum cost, having a hub-and-spoke network topology as a data entry to the problem. More specifically, the problem deals with the planning of loads to be done at each terminal, taking into account each LTL freight that needs to be transported, defining the path that each good needs to follow to reach its destination. A new mathematical model is proposed, and, since real world problems are very hard to solve, a heuristic based on tabu search is also developed. Computational experiments show that our heuristic can effectively solve real-world instances from a trucking company in Brazil.

*Keywords:* network design, LTL carrier, tabu search.

## 1. INTRODUÇÃO

Problemas que envolvem a localização de instalações para empresas de transporte rodoviário de carga parcelada (ou fracionada, isto é, qualquer carga cujo volume, para um cliente, uma origem e um destino, não é suficiente para lotar um veículo) são normalmente modelados como problemas do tipo *hub-and-spoke*, em que terminais de consolidação (ou *hubs*) operam como pontos de concentração e consolidação de cargas parceladas diversas, uma vez que é impossível oferecer serviços diretos entre cada par origem-destino de forma econômica e com nível de serviço adequado. Assim, cargas de diversas origens e para diferentes destinos são consolidadas em um *hub*, e transportadas conjuntamente com outras cargas que possuem o mesmo destino ou destinos próximos entre si, atendidos por um mesmo *hub*.

Nesse contexto, as empresas de transporte rodoviário dispõem de estruturas de apoio, que são instalações geograficamente distribuídas, geralmente denominadas “filiais”, algumas das quais funcionam como terminais concentradores (ou *hubs*) e nas quais são consolidadas cargas de diferentes origens para destinos convergentes, enquanto as demais filiais servem apenas como ponto de entrada e/ou saída dos despachos a serem transportados, fazendo a ligação direta com os remetentes e destinatários das cargas.

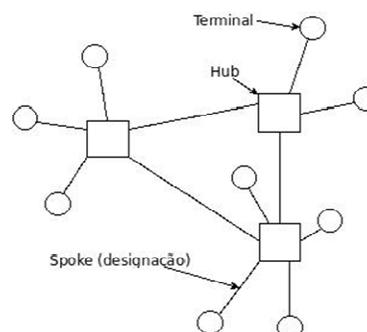


Figura 1. Exemplo de rede *hub-and-spoke*

A Figura 1 ilustra uma rede do tipo *hub-and-spoke* para uma transportadora. Uma filial é conectada a um terminal de consolidação (ou *hub*) por um *spoke*. Todos os terminais de consolidação são conectados entre si, e a ligação entre filiais que não são *hubs* é, via de regra, realizada somente através de filiais que funcionam como terminais de consolidação.

Embora tal abordagem seja adequada para a definição da configuração da rede, em termos de quantas e quais filiais da transportadora operam como terminais de consolidação, e a alocação das demais filiais a esses terminais (vide, por exemplo, o trabalho de Cunha e Silva, 2007), nem sempre isso ocorre no dia-a-dia das transportadoras, uma vez que, muitas vezes, carregamentos diretos entre filiais não-*hub* são não só realizados, como também incentivados devido ao menor custo para operação. Isso permite ainda reduzir o trabalho de manuseio nos *hubs* intermediários, além de melhorar o nível de serviço. Tal situação ocorre devido a variações diárias nas demandas de carga entre terminais que não são capturadas na modelagem em nível estratégico, e nem tampouco o tamanho e o número de veículos necessá-

<sup>1</sup> Marcos Roberto Silva, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Transportes, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil. (e-mail: marcos.roberto.silva@uol.com.br).

<sup>2</sup> Claudio Barbieri da Cunha, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Transportes, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil. (e-mail: cbcunha@usp.br).

rios em cada ligação, tendo em vista as suas restrições de capacidade de carga.

Às vezes, se toda a carga originada em um terminal for enviada ao *hub* ao qual está alocado e daí para os demais *hubs*, isso pode acarretar ociosidade dos veículos, ou ainda pode comprometer, dependendo do caso, o prazo de entrega, pois, cada parada intermediária em um terminal de consolidação adiciona, em média, um dia no prazo total para a carga atingir o seu terminal de destino, de onde será feita a entrega final. Assim, em algumas situações é melhor despachar parte das cargas diretamente para os destinos ao invés de passar por dois *hubs*, caso exista carga suficiente para ocupar razoavelmente um veículo direto para algum terminal de destino, ou então com somente uma parada intermediária em um único *hub*.

Na Figura 2 são ilustradas quatro alternativas possíveis de rotas para um fluxo originado em um terminal *i* com destino a um terminal *j*, alocados respectivamente aos *hubs* K e L:

- carregamento direto de *i* para *j*, caso a quantidade de carga seja suficiente para lotar ou ocupar razoavelmente a capacidade de um veículo;
- carregamento via *hub* de origem K; nesse caso, além das cargas destinadas ao terminal *j*, podem também ser enviadas cargas para outros terminais ligados ao *hub* K, ou ainda eventualmente destinadas outro *hub* da rede, dado que todos os *hubs* estão interconectados;
- carregamento via *hub* de destino L; nesse caso, além das cargas de *i* para *j*, podem ser enviadas para o *hub* L todas as demais cargas destinadas a terminais ligados a L ou ao próprio *j*;
- envio das cargas de *i* para *j* via ambos os *hubs* K e L.

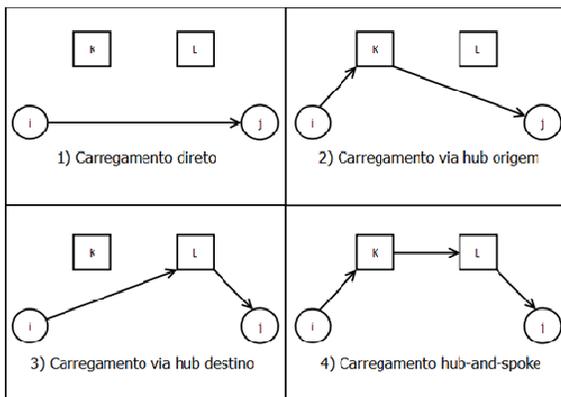


Figura 2. Possíveis rotas entre os terminais *i* e *j* alocados aos *hubs* K e L

Existe ainda uma quinta alternativa de rota, que considera uma parada intermediária em um *hub* diferente dos *hubs* ao quais os terminais *i* e *j* estão alocados (K e L, respectivamente). Esse tipo de rota é mais raro de ocorrer na prática, mas deve ser previsto na modelagem. Um exemplo desse tipo de rota pode ser visto na Figura 3, em que a carga de *i* para *j* é enviada para o *hub* K, e em seguida para o *hub* intermediário 'M' para aí sim alcançar o terminal de destino *j*, porém sem passar pelo *hub* L ao qual o terminal *j* está alocado.

Tendo em vista essa caracterização do problema, este ar-

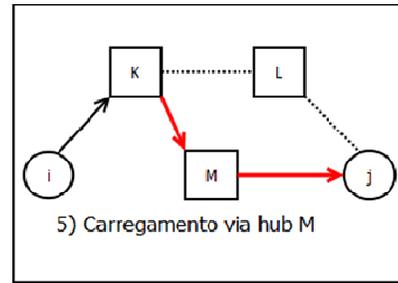


Figura 3. Alternativa de rota entre os terminais *i* e *j* utilizando um *hub* 'M'

tigo tem por objetivo propor um método para solução do problema da definição de uma programação de carregamento entre terminais no transporte de carga parcelada, que pode ser sintetizado como: dada uma configuração da rede *hub-and-spoke*, definir as rotas a serem operadas, e o dimensionamento da quantidade e tipo de veículos necessários em cada rota, para que todas as cargas sejam transportadas até o seu terminal de destino a um menor custo possível, considerando a possibilidade de consolidação de cargas nos *hubs*. Mais especificamente, o problema consiste na definição do percurso ou caminho que cada carga deve percorrer até chegar ao seu destino, incluindo as possíveis paradas intermediárias, e também na definição do número de veículos de cada tipo/tamanho a serem utilizados em cada rota. É proposto um modelo matemático para a sua resolução, e também uma heurística baseada em busca tabu, tendo em vista que a dificuldade do problema impede a obtenção de soluções exatas para instâncias reais, encontradas na prática das empresas transportadoras.

A sequência desse artigo está organizada da seguinte forma: na seção 2 é apresentada uma revisão bibliográfica do tema. Já na seção 3 é detalhado o modelo matemático proposto para representar o problema em estudo. A estratégia de solução baseada em busca tabu é descrita na seção 4, enquanto que na seção 5 são apresentados os resultados dos experimentos computacionais realizados utilizando dados reais de uma empresa transportadora de carga parcelada pelo modal rodoviário no Brasil. Finalmente, a seção 6, contém as considerações finais do trabalho.

## 2. O PROBLEMA DO CARREGAMENTO DE CARGAS PARCELADAS NA LITERATURA

O problema do carregamento de cargas em uma rede de transporte tem sido largamente estudado na literatura, e conhecido com o nome de *network loading problem* (NLP). O NLP é considerado uma variante do problema do projeto de redes capacitadas com múltiplas *commodities* (*capacitated network design problem*), e foi estudado pela primeira vez por Magnanti *et al.* (1993), no contexto de configuração de uma rede de telecomunicações, cujo objetivo foi determinar o número de instalações de transmissão digital a serem abertas em cada arco da rede de tal forma a atender toda a demanda a um mínimo custo. O NLP modela situações em que o custo variável associado aos fluxos é igual à zero, e instalações, com capacidades fixas e conhecidas, estão disponíveis para o transporte. Já Magnanti *et al.* (1995) consideraram dois tipos distintos de recursos a serem alocados nos arcos. Nesse caso dois tipos diferentes de cabos em uma rede de telecomunicações. Os autores utilizaram duas

abordagens para solução do problema de programação inteira mista: uma estratégia baseada em relaxação lagrangiana, e outra baseada na definição de planos de corte utilizando três tipos de inequações válidas, obtendo desempenhos similares.

Barahona (1996) tratou do NLP em redes de telecomunicações e estudou o problema com e sem *bifurcação*, isto é, o fluxo para cada carga deve seguir um único caminho até o seu destino. O problema foi resolvido utilizando-se uma relaxação baseada nos fluxos *multicommodity*, e a partir da solução do problema bifurcado, derivou também a solução do problema que não permite bifurcação dos fluxos.

O foco do trabalho de Mirchandani (2000) foi na solução do NLP capacitado, com dois tipos de recursos a serem alocados nos arcos, da mesma forma que em Magnanti *et al.* (1995). Foram desenvolvidas formulações matemáticas equivalentes em um espaço dimensional menor, projetando as variáveis de fluxo e estudando as propriedades do poliedro para os cones de projeção correspondentes.

No trabalho de Berger *et al.* (2000) foi estudado o NLP não bifurcado, tendo os autores desenvolvido uma heurística baseada em busca tabu para solução do problema, cujo desempenho foi comparado com duas outras heurísticas desenvolvidas: *1-opt* e *2-opt*. Os experimentos computacionais realizados mostraram que a busca tabu obteve um desempenho superior no que diz respeito à qualidade da solução final obtida, mas necessitou, em alguns casos, oito vezes mais tempo de processamento para a obtenção das soluções.

Gendron *et al.* (2002) propuseram uma heurística em duas etapas para solução do NLP não bifurcado. A primeira etapa da heurística consistiu na construção de uma solução inicial que em seguida foi melhorada utilizando um mecanismo de busca local e busca tabu. Quatro estratégias diferentes de diversificação foram testadas em problemas com 200 e 500 nós. Nenhuma comparação foi realizada para se verificar o quão distante as soluções obtidas estavam da solução ótima dos problemas testados.

Avella *et al.* (2007) introduziram uma nova classe de inequações métricas justas para o NLP, que caracterizaram completamente o envoltório convexo de soluções inteiras viáveis para o problema, apresentando algoritmos de separação para as inequações métricas justas e algoritmos de plano de corte.

No trabalho de Babonneau e Vial (2010) os autores utilizam uma abordagem inovadora para solução do NLP. O método de solução desenvolvido pelos mesmos pode ser considerado uma versão modificada do algoritmo de decomposição de Benders. Os experimentos computacionais realizados mostraram que a abordagem utilizada pelos autores para solução do NLP se mostrou eficiente, especialmente para problemas de maior porte, com mais de 700 *commodities*, superando todos os resultados obtidos por outros autores para esta classe de problemas.

Altin *et al.* (2010) estudaram o NLP em que as demandas entre os pares de nós da rede são assumidas como não sendo conhecidas de antemão. Os autores propuseram uma nova formulação matemática mais compacta para o problema, e após um estudo de poliedros baseados na projeção das variáveis de fluxo do problema, resolveram o NLP utilizando *branch-and-cut* (B&C). Os experimentos computacionais realizados mostraram que o B&C foi eficaz na solução de problemas com até dois tipos diferentes de recursos dispo-

níveis para serem alocados nos arcos.

Todos os estudos relacionados ao NLP enfatizam a possibilidade de se modelar o problema de carregamento de carga parcelada em uma rede de transporte como sendo um caso especial do NLP, porém não foi encontrado na literatura nenhum exemplo de modelagem desse problema utilizando essa abordagem. Existem ainda diversos trabalhos que tratam de um problema similar, nomeado de problema de projeto de uma rede de serviços, ou *service network design problem*, muitas vezes contemplando múltiplos períodos, no nível de planejamento operacional, incluindo incertezas em certos parâmetros, tais como, por exemplo, o trabalho de Dall'Orto *et al.* (2006); porém diferem do problema aqui estudado pois neste artigo é tratado o problema no nível de planejamento tático, possuindo como dado de entrada uma configuração prévia da rede de transporte com uma estrutura similar a uma rede *hub-and-spoke*, sem entrar no detalhe da disponibilidade e da programação dos veículos e do fluxo dos vazios.

### 3. MODELO MATEMÁTICO

Considera-se, para a modelagem do problema aqui proposto, que cada carga deva percorrer um único caminho até chegar ao seu destino, não sendo permitido o seu fracionamento (ou fracionamento) entre dois caminhos (ou rotas) que ligam dois terminais, representados como nós. Essa hipótese é essencial a fim de representar, em termos práticos, como operam as transportadoras de carga parcelada, pois é fundamental que o líder local de cada terminal de origem tenha rotas pré-definidas como uma regra única a ser seguida no que diz respeito à forma como as cargas devam ser carregadas, especialmente com relação às possíveis paradas em terminais intermediários, até chegarem aos seus destinos. Em outras palavras, é indesejável que uma carga, composta por várias encomendas que devem ser transportadas de um dado terminal de origem para um terminal de destino, seja fracionada em veículos que seguem rotas distintas, com tempos de viagem diferentes, dificultando o rastreamento das encomendas dos clientes que compõem cada uma das cargas que são fracionadas.

Nesse contexto, a modelagem proposta para o problema, inspirada no problema denominado *network loading problem* (NLP) (Barahona, 1996), considera que o custo variável unitário por unidade de capacidade (por exemplo, \$/tonelada) associado à quantidade de carga a ser transportada é igual a zero, e veículos com capacidade fixa, e custos que independem da sua ocupação, estão disponíveis para o transporte de cargas. Esses veículos podem ser alocados a rotas de um conjunto pré-definido de rotas candidatas que ligam os terminais, sendo que dois ou mais veículos, não necessariamente todos idênticos em termos de tamanho, podem ser alocados a uma rota a fim de acomodar toda a carga a ser transportada.

Dessa forma, o modelo proposto para o problema consiste na definição dos arcos ou ligações a serem utilizados, dentre um conjunto de ligações possíveis entre nós ou terminais de uma rede, de tal forma a atender toda a demanda de transporte, de cada origem para cada destino, ao menor custo possível. O custo nos arcos corresponde a um valor fixo proporcional ao número de veículos utilizados caso o mesmo seja selecionado.

Seja  $N$  o conjunto de terminais (nós) da rede em estudo;

$K$  o conjunto de cargas a serem transportadas, sendo que cada carga compreende todas as encomendas de uma dada origem para um dado destino;  $T$  o conjunto de tipos de veículos disponíveis (usualmente de dois a até três tipos ou tamanhos no transporte rodoviário de longa distância);  $A$  o conjunto de arcos candidatos para a seleção das rotas da rede aos quais serão alocados veículos.

Deve-se salientar que as possíveis alternativas de percurso de cada uma das cargas definem os arcos candidatos que compõem o conjunto  $A$ , sendo esta uma decisão da empresa, com base na sua experiência e em restrições, condicionantes e regras de negócio que, muitas vezes, não podem ser modeladas explicitamente. Em geral consideram-se, por exemplo, arcos correspondentes a ligações diretas para os pares de terminais cujas demandas de carga superem a capacidade do maior veículo disponível; no entanto, como essas demandas quase nunca resultam, na prática, um número de veículos inteiros (por exemplo, a demanda direta entre dois terminais lota 1,3 veículos), é necessário considerar também ligações entre esses dois terminais via *hub* de origem, via *hub* de destino e, entre os dois *hubs*, conforme mostrado anteriormente nas Figuras 2 e 3. Essa é a lógica que os gerentes operacionais utilizam na seleção das alternativas de envio das cargas.

Para cada carga  $k \in K$  são conhecidas a sua origem  $O(k)$ , o seu destino  $D(k)$  e o peso total a ser transportado  $R^k$ . Para cada tipo de veículo  $t \in T$  são conhecidos a sua capacidade de carga em peso  $K^t$  e o seu custo  $a_{ij}^t$  quando utilizado no trajeto entre dois terminais que corresponde ao arco  $(i, j) \in A$ . Deve-se notar que o custo é fixo para um determinado veículo numa dada rota e independe da quantidade de carga carregada no mesmo.

Definem-se as seguintes variáveis de decisão para o problema:

- $x_{ij}^t$  = o número de veículos do tipo  $t$ ,  $t \in T$  alocados ao arco  $(i, j) \in A$ ; corresponde a variável de fluxo em cada arco  $(i, j) \in A$ , do tipo inteira não negativa; e
- $f_{ij}^{kt}$  = variável binária que recebe o valor 1 se a carga  $k$ ,  $k \in K$ , é transportada por um veículo do tipo  $t$ ,  $t \in T$ , no arco  $(i, j) \in A$  e zero caso contrário.

O modelo matemático proposto para representar o problema de carregamento de carga parcelada em uma rede de transporte pode ser formulado como segue:

$$\text{Min} \sum_{t \in T} \sum_{(i,j) \in A} a_{ij}^t x_{ij}^t, \quad (1)$$

sujeito às restrições:

$$\sum_{t \in T} \left( \sum_{\{j \in N: (i,j) \in A\}} f_{ij}^{kt} - \sum_{\{l \in N: (l,i) \in A\}} f_{li}^{kt} \right) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = O(k) \\ -1, & \text{se } i = D(k) \quad i \in N, k \in K \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (2)$$

$$\sum_{k \in K} R^k f_{ij}^{kt} \leq K^t x_{ij}^t \quad \forall (i, j) \in A, t \in T, \quad (3)$$

$$x_{ij}^t \geq 0, \text{ inteiro}, \quad \forall (i, j) \in A, t \in T, \quad (4)$$

$$f_{ij}^{kt} \in \{0,1\}, \quad \forall (i, j) \in A, k \in K, t \in T. \quad (5)$$

A função objetivo (1) visa minimizar o custo resultante das decisões de criação de rotas e da definição da quantidade de veículos alocados em cada rota. As restrições de conservação de fluxo para cada uma das cargas em cada terminal são representadas pelas restrições (2). Já as restrições (3) asseguram que a quantidade total de cargas alocadas a um dado tipo de veículo, em um determinado percurso, não deve exceder a capacidade disponível. Por fim, as restrições (4) e (5) definem o domínio das variáveis de decisão.

Embora não necessárias para a viabilidade do problema, verificou-se que se forem adicionadas à formulação matemática as restrições (6) e (7), elas tornam a formulação mais robusta, melhorando a qualidade da relaxação linear, e acarretando um menor número de iterações do *branch-and-bound* para se atingir a solução ótima, conforme evidenciado em experimentos computacionais com o pacote de otimização CPLEX da IBM/ILOG em problemas de pequeno porte que são possíveis de serem resolvidos até a sua otimalidade.

$$\sum_{t \in T} f_{ij}^{kt} \leq \sum_{t \in T} x_{ij}^t, \quad \forall (i, j) \in A, k \in K, \quad (6)$$

$$R^k f_{ij}^{kt} \leq K^t, \quad \forall (i, j) \in A, k \in K, t \in T. \quad (7)$$

As restrições (6) são similares às utilizadas por Barahona (1996) para o problema “não bifurcado”, com somente um tipo de veículo. Já as restrições (7) visam garantir que nenhuma carga individual exceda a capacidade de um veículo disponível (de qualquer tipo); dessa forma, evita-se que veículos de menor capacidade sejam alocados a arcos cujo fluxo de carga supere a sua capacidade.

O NLP é um problema *NP-hard* e há pouca esperança de desenvolvimento de algoritmos eficientes para sua solução (Magnanti *et al.*, 1995). A versão não bifurcada adiciona ainda mais complexidade ao problema, pois impõe que as variáveis de fluxos no modelo matemático tenham que ser binárias. O NLP que permite bifurcação nos fluxos possui somente  $|A|$  variáveis inteiras, enquanto que o problema não bifurcado possui, além das mesmas  $|A|$  variáveis inteiras, outras  $|A| \cdot |K| \cdot |T|$  variáveis binárias.

Experimentos computacionais realizados, utilizando o pacote de otimização IBM/ILOG CPLEX versão 9.1, evidenciam que o modelo exato permite encontrar a solução ótima apenas para problemas de pequeno porte, com número muito reduzido de terminais, arcos e cargas, e que são significativamente inferiores à instâncias de problemas encontrados na prática das transportadoras de carga fracionada, o que exige a proposição de uma estratégia de solução heurística, conforme apresentado a seguir.

#### 4. ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO BASEADA EM BUSCA TABU

Dada a complexidade para resolução do problema de carregamento de carga parcelada em uma rede de transporte, propõe-se um método de solução baseado na metaheurística busca tabu. A busca tabu é um procedimento de busca local que utiliza estruturas de memória para guiar os movimentos de uma solução viável para outra, com o objetivo de se explorar regiões do espaço de busca que poderiam não ser explorados, tentando escapar do ótimo local. Para maiores detalhes quanto aos princípios fundamentais da busca tabu sugere-se consultar os trabalhos de Glover (1986) e Glover (1989).

A heurística proposta compreende um procedimento para a geração de uma solução inicial viável; uma função para cálculo da quantidade e tipos de veículos utilizados em cada rota; uma função para determinação do custo de uma solução; um algoritmo de melhoria baseado na busca tabu.

Para a geração da solução inicial do problema, é necessário um método para selecionar os arcos a serem utilizados e, concomitantemente, determinar o número de veículos de cada tipo a serem alocados a cada arco. Para tanto, seja  $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_m\}$  cada um dos arcos do conjunto de arcos possíveis de serem utilizados para a definição das rotas a serem operadas para o carregamento de carga parcelada na rede de transporte. Isso permite utilizar um vetor binário de tamanho igual à cardinalidade do conjunto  $A$  (ou simplesmente  $|A|$ ) para representar uma solução para o problema. Se a posição  $i$  desse vetor binário for igual a 1 ( $a_i = 1$ ), significa que o arco  $a_i$  é usado em ligações entre terminais e igual a zero caso contrário.

Inicialmente são ordenadas todas as cargas a serem transportadas, por par origem-destino, em ordem decrescente de peso total. O algoritmo de ordenação utilizado é uma versão modificada do *quicksort* descrita em Singleton (1969). Em seguida, iniciando-se com a carga de maior peso, determina-se o caminho mínimo partindo do terminal de origem da carga, até o seu terminal de destino, tendo como entrada uma rede contendo todos os arcos disponíveis no conjunto  $A$  e considerando como atributo dos arcos a distância entre terminais.

Uma vez encontrado o caminho mínimo para a maior carga em termos de peso, atribui-se zero para a distância em cada um dos arcos que compõem esse caminho mínimo encontrado. Em seguida, encontra-se o novo caminho mínimo para a próxima carga de maior peso ainda não examinada, considerando-se esse grafo com distâncias nos arcos modificados. O procedimento é repetido até que todas as cargas tenham sido examinadas, em ordem decrescente de peso total.

Nessa etapa, o peso de cada uma das cargas não é levado em consideração, pois primeiramente são definidas as ligações a serem abertas entre os terminais da rede e em seguida, conforme descrito na etapa seguinte é realizado o cálculo da quantidade e tipos de veículo utilizados em cada uma dessas ligações. O objetivo da atribuição de custo igual a zero é incentivar novas cargas a utilizarem os mesmos arcos já abertos por cargas previamente avaliadas, resultando assim em um menor custo total da solução.

Esse procedimento é executado até que todas as cargas tenham as rotas definidas para chegarem aos seus respecti-

vos destinos, a partir das quais é determinado o custo da solução inicial assim obtida. Adotou-se o algoritmo de caminho mínimo descrito em Gallo e Pallottino (1988), que se baseia no método de Dijkstra com a fila de prioridades, embora a nossa implementação considerou um *heap* binário a fim de identificar em  $O(1)$  a etiqueta (ou rótulo) de menor custo.

Dessa forma, como resultado parcial da geração de uma solução inicial para o problema, obtém-se um vetor solução que indica quais arcos foram selecionados, e uma estrutura de dados contendo os arcos utilizados por cada carga para chegar até o seu terminal de destino. Deve-se destacar que o vetor solução obtido como descrito anteriormente indica apenas os arcos a serem utilizados na solução, porém não há nenhuma indicação das quantidades e dos tipos de veículos utilizados em cada arco. Assim, tendo como dados (i) a lista de cargas que utilizam cada um dos arcos selecionados na solução inicial; (ii) o peso de cada uma dessas cargas; e (iii) a capacidade dos veículos disponíveis para operação, e considerando ainda o peso total de todas as cargas que usam cada arco, determinam-se os veículos necessários para percorrer cada ligação entre terminais.

Deve-se observar que, dado que cada arco representa um conjunto de cargas, que podem ter origens e destinos distintos, mas estão sendo movimentadas em conjunto entre dois terminais, utilizando um ou mais veículos, a ordem em que as cargas são selecionadas para serem alocadas nos veículos é de extrema importância, e esse subproblema é por si só muito difícil de ser resolvido. Mais especificamente, esse problema consiste em determinar o número de veículos que represente a solução de mínimo custo, e quais cargas alocar a cada veículo, que pode ser modelado como um problema conhecido na literatura, como *bin packing problem* (BPP).

Mais especificamente, o BPP pode ser definido da seguinte forma: dados  $j = 1, \dots, n$  objetos ou cargas com seus respectivos pesos  $w_j$ , e  $i = 1, \dots, n$  bins (ou veículos) idênticos de capacidade finita  $c$ , determinar a alocação (ou designação) das  $n$  cargas aos veículos (sendo  $w_j \leq c, \forall j$ ), de tal modo que o número de veículos utilizados seja mínimo, e as restrições de capacidade em cada um dos veículos sejam respeitadas.

No caso especial da determinação de uma solução inicial para o problema do carregamento de cargas parceladas em uma rede de transporte, com  $T$  tipos diferentes de veículos (embora, na prática, não sejam utilizado mais do que dois tamanhos de veículo), a quantidade de veículos utilizados de cada tipo é armazenada em um vetor específico, sendo que cada posição desse vetor corresponde à quantidade de veículos utilizados em cada arco da solução.

Tendo em vista que o BPP é *NP-hard* (Garey e Johnson, 1979), utiliza-se uma heurística baseada em busca tabu a fim de determinar o menor número de veículos para cada arco aberto na solução. Para representar a solução do BPP é criado um vetor de tamanho igual à quantidade de cargas que utilizam um determinado arco e, em cada posição desse vetor são armazenados os índices das cargas. Deve-se notar que essa heurística baseada em busca tabu para o BPP é executada somente se a somatória do peso das cargas que utilizam o arco for maior que a capacidade do menor veículo sendo considerado, pois caso contrário, a solução é trivial.

Para a determinação da solução inicial do BPP, considera-se uma heurística inspirada na tradicional heurística BFD (*best fit decrease*) na qual inicialmente são ordenadas as

cargas no arco, em ordem decrescente de peso. Em seguida é alocado, primeiramente, o veículo de maior capacidade, e as cargas são designadas sequencialmente aos veículos de acordo com o vetor solução, até atingir a sua capacidade limite. As decisões de escolha da ordenação das cargas em ordem decrescente de peso, e também a decisão de se iniciar a alocação com o veículo de maior capacidade, foram tomadas com base nos experimentos computacionais realizados que apresentaram melhores soluções para problemas de grande porte. Dado que esse procedimento para resolução do BPP e dimensionamento da quantidade de veículos deve ser realizado para cada um dos arcos selecionados da rede, buscou-se propor uma heurística simples, e que pudesse obter resultados satisfatórios em um curto tempo de processamento.

Uma vez definida a quantidade e tipo de veículos alocados em cada arco aberto na rede, o cálculo do custo total da solução se torna trivial, tendo por base a função objetivo representada pela expressão (1) do modelo matemático para o problema de carregamento.

Após a geração da solução inicial, é aplicada uma heurística de melhoria baseada em busca tabu cujo esquema de funcionamento é indicado na Figura 4. Essa heurística de melhoria explora apenas o espaço de soluções viáveis do

problema, entendendo como uma solução viável aquela que possui uma quantidade definida de arcos abertos, de tal forma a possibilitar que, com esse conjunto de arcos, todas as cargas possam ser transportadas desde o seu terminal de origem até o seu terminal de destino; ou seja, existe um caminho possível a ser percorrido entre cada par de terminais correspondente a cada uma das cargas a serem transportadas. Dessa forma, um movimento de melhoria é selecionado para ser realizado apenas se não resultar em uma solução inviável para o problema.

Em linhas gerais, a cada iteração da busca tabu, a heurística consiste em primeiramente selecionar a modificação na solução corrente a ser realizada, ou melhor, um movimento a ser executado, entendendo como movimento a inclusão ou exclusão de um determinado arco da rede. Todos os arcos existentes, inclusos ou não na solução corrente, são testados sequencialmente, sendo escolhido o arco que resulta na obtenção de uma solução de melhor qualidade ao se comparar com a solução corrente. O arco selecionado para movimento é feito tabu por um certo número de iterações.

A cada avaliação de movimento a ser realizado, é calculado o custo da nova solução, que consiste em: (i) definir o caminho que cada carga deve percorrer, utilizando o algoritmo do caminho mínimo, armazenando os arcos utilizados

```

Heurística Busca Tabu
Início
Ler dados de entrada
Criar uma lista  $\mathcal{L}$  de tamanho igual a cardinalidade do conjunto  $A$  de rotas candidatas
Para cada posição  $i$  de  $\mathcal{L}$  Faça
     $\mathcal{L}[i] = 0$ 
Fim Para cada
Ordenar as cargas em ordem decrescente de peso
Armazenar as cargas ordenadas em uma estrutura de dados do tipo pilha  $\mathcal{P}$  mantendo a carga de maior peso no topo da pilha.
Criar uma rede artificial  $\mathcal{R}$  contendo todas as rotas candidatas contidas no conjunto  $A$ 
Enquanto houver elementos na pilha  $\mathcal{P}$  Faça
    Remova a carga  $c$  do topo da pilha  $\mathcal{P}$ 
    Calcular o caminho mínimo desde a origem até o destino da carga, na rede  $\mathcal{R}$ 
    Inserir as rotas utilizadas pela carga  $c$  na solução inicial do problema (equivalente a  $\mathcal{L}[i] = 1$  para todas as rotas  $i$  utilizadas pela carga  $c$ )
    Definir custo igual a zero para as rotas utilizadas pela carga  $c$  na rede  $\mathcal{R}$ 
Fim Enquanto
Calcular o custo da solução inicial
Enquanto a quantidade máxima de iterações da tabu não for alcançada Faça
    Para cada posição  $i$  da lista  $\mathcal{L}$  Faça
         $\mathcal{L}[i] = 1 - \mathcal{L}[i]$ 
        Verificar viabilidade da solução
        Se solução inviável Então
            desfazer o movimento ( $\mathcal{L}[i] = 1 - \mathcal{L}[i]$ )
            testar a próxima rota ( $i = i + 1$ )
        Senão
            Calcular o custo da solução após o movimento
            Armazenar a rota alterada no movimento corrente
            Se a rota alterada não é tabu ou solução corrente < melhor solução Então
                Se solução corrente < melhor movimento Então
                    Gravar como melhor movimento a ser executado
                    Grava rota a ser alterada
                Fim Se
            Fim Se
        Fim Para cada
    Se foi possível encontrar movimento viável Então
        Executar melhor movimento encontrado
        Fazer rota alterada como tabu
        Se o custo do melhor movimento encontrado for igual a melhor solução corrente Então
            aumentar a quantidade que um dado movimento permanece tabu em  $\lambda$  iterações
        Fim Se
        Se não foi possível encontrar um movimento que melhore a solução corrente após uma quantidade fixa de iterações Então
            Gerar uma nova solução inicial aleatória
        Fim Se
    Fim Enquanto
Fim Heurística Busca Tabu

```

Figura 4. Esquema básico da heurística baseada em busca tabu

por cada carga para chegar até o seu destino e, em seguida, (ii) resolver o BPP para dimensionar a quantidade de veículos (por tipo) utilizado em cada arco da rede, tendo como entrada as cargas que utilizarão cada um dos arcos dessa nova solução.

Dois mecanismos simples são utilizados para tentar evitar que a heurística fique presa em um ótimo local. O primeiro mecanismo proposto é inspirado no trabalho de Battiti e Tecchiolli (1994), que desenvolveram uma busca tabu reativa (*reactive tabu search*). A busca tabu reativa possui um mecanismo de memória que tem como objetivo armazenar soluções previamente visitadas, e dinamicamente alterar os parâmetros da busca tabu para tentar explorar diferentes regiões do espaço de soluções do problema.

Neste trabalho é utilizado um mecanismo simples que armazena o valor da função objetivo, e em qual iteração da busca tabu ela foi encontrada, permitindo com isso que o parâmetro que define a quantidade de iterações que um movimento permanece tabu (conhecido como duração tabu ou *tabu tenure*), seja alterado dinamicamente a fim de tentar inibir a visita de uma mesma solução, em um dado intervalo mínimo de iterações.

O segundo mecanismo utilizado para se explorar diferentes regiões do espaço de soluções baseia-se no conceito que alguns autores denominam por diversificação forte (*strong diversification*), conforme descrito em Dell'Amico *et al.* (1999) e em Stecco *et al.* (2009). Consiste na geração de uma nova solução inicial, escolhendo-se aleatoriamente arcos a serem inseridos na solução, até que esta se torne viável. Esse procedimento é aplicado após um número fixo de iterações sem melhoria na busca tabu.

## 5. EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS

Não existem na literatura instâncias de teste relativas ao problema de carregamento de veículos objeto do presente trabalho e que permitam a avaliação do desempenho da heurística proposta. Conforme discutido anteriormente, apesar das similaridades já apontadas na revisão bibliográfica, o problema aqui tratado é de natureza diferente do NLP (*network loading problem*) encontrado na literatura, uma vez que o NLP trata da solução de problemas de rede de telecomunicações, tendo proporções de custo, volume de tráfego, e quantidade de arcos bem diferentes dos dados de uma empresa transportadora de carga parcelada, podendo levar a interpretações incorretas, caso esses dados sejam utilizados para avaliação. Sendo assim, optou-se por utilizar diretamente dados reais de uma empresa transportadora de carga parcelada.

Foram obtidos junto à referida empresa os dados do fluxo de carga parcelada de todo o ano de 2009, a fim de serem utilizados nos experimentos computacionais. Esses dados foram manipulados apropriadamente e resultaram 12 instâncias de teste, uma para cada mês do ano. Essas instâncias correspondem a 51-53 terminais e cerca de 200 cargas, conforme pode ser visto na Tabela 1. Os significados das colunas dessa tabela são: *Term.*: indica o número de terminais envolvidos em cada problema, correspondendo a um ponto de origem e/ou destino de carga; *Cargas*: a quantidade total de cargas a serem transportadas; *Peso (kg)*: peso total de todas as cargas a serem transportadas; *Var. Int.*: número de variáveis inteiras (ou rotas disponíveis) do problema, para um único tipo de veículo; *Var. bin.*: número de

variáveis binárias do problema de programação inteira, para um único tipo de veículo; *Restr.*: número de restrições de cada problema, para um único tipo de veículo; *Não-zeros*: número de elementos diferentes de zero da matriz de restrições, no caso de um único tipo de veículo.

É possível também verificar, na Tabela 1 as diferenças no peso médio por carga transportada ao longo do ano, confirmando a usual sazonalidade da demanda por transporte de carga parcelada no Brasil. Analisando os dados fornecidos, observa-se no início do ano uma forte queda na demanda, tendo um peso médio por carga transportada aproximadamente 30% menor, ao se comparar com o último trimestre do ano.

O experimento computacional consistiu em resolver cada um dos 12 problemas gerados utilizando tanto o pacote de otimização IBM/ILOG CPLEX versão 9.1, como também com a heurística proposta baseada em busca tabu, a qual foi implementada computacionalmente em linguagem de programação C++. Foram considerados dois tipos de veículos para os experimentos: *truck* e *carreta*, com capacidades de 12 e 25 toneladas, respectivamente. As rotas alternativas foram obtidas conforme descrito na seção anterior, considerando, para cada fluxo de carga cinco alternativas básicas para envio/utilização de rotas: (i) carregamento direto entre os terminais; (ii) carregamento via *hub* origem; (iii) carregamento via *hub* destino; (iv) carregamento típico *hub-and-spoke*; (v) carregamento via um *hub* qualquer da rede.

O computador utilizado para os experimentos computacionais foi um laptop com sistema operacional Windows Vista, com processador Intel Core 2 Duo 2,20 GHz e 4 GB de memória RAM, sendo que somente um processador foi utilizado nos experimentos computacionais.

Os experimentos iniciais realizados ao se tentar resolver quaisquer dos 12 problemas com o CPLEX puderam confirmar a dificuldade em se obter a solução ótima para esses problemas. Por exemplo, ao se tentar resolver a instância correspondente ao mês de janeiro (a menor dentre as 12 instâncias), considerando-se apenas um único tipo de veículo, não foi possível determinar a solução ótima após 18 horas de processamento, e o *gap* entre a melhor solução inteira obtida e o *lower bound* da relaxação linear quando da interrupção do processamento ainda era de 17,61%. Já para o mesmo mês (janeiro), porém considerando os dois tipos de veículos (*truck* e *carreta*), não foi possível ao CPLEX encontrar nenhuma solução viável após 18 horas de processamento.

Assim, dada a dificuldade para a obtenção da solução ótima para cada uma das 12 instâncias, e também devido à restrição imposta do tempo aceitável para se obter uma solução para o problema prático, optou-se por realizar os experimentos considerando-se um o tempo limite máximo para processamento, tanto para o CPLEX como também para a heurística baseada em busca tabu, de 30 minutos, conforme apresentado na Tabela 1.

Esse tempo limite de 30 minutos condiz com a expectativa da empresa transportadora, que pretende não só utilizar o modelo como uma ferramenta de planejamento tático, mas também diariamente avaliar possíveis modificações na sua estrutura de rotas, adicionando e/ou excluindo novas rotas, ou ainda alterando o tipo de veículo alocado em cada rota, de acordo com o volume de cargas no dia.

Adicionalmente, foram adotados os seguintes parâmetros para a heurística de melhoria baseada em busca tabu: o nú-

mero de iterações que cada movimento permanece tabu (*tabu tenure*), foi fixado em 5 iterações; o mecanismo de diversificação é ativado após 100 iterações sem melhoria na solução incumbente. Já para a heurística que resolve o BPP com a finalidade de determinar o número de veículos de cada tipo utilizados em cada rota, a duração tabu também foi fixada em 5 iterações, de um total de 10 iterações realizadas, sendo esse o critério de parada.

Na Tabela 1 são apresentados ainda os resultados obtidos com os experimentos computacionais realizados. A coluna com o nome 'CPLEX' corresponde à melhor solução inteira obtida pelo software após 30 minutos de processamento, para o problema considerando somente um tipo de veículo, o veículo maior (carreta). Na coluna 'GAP (%)<sup>1</sup>' é apresentado o gap do CPLEX no momento da interrupção do processamento. Os resultados da busca tabu são apresentados na coluna 'Tabu<sup>1</sup>'. A coluna 'Tabu (%)<sup>1</sup>', refere-se à diferença percentual obtida ao se comparar as soluções obtidas com o CPLEX e com a busca tabu, calculada como:

$$Desvio\ Tabu(\%) = \frac{(Tabu - CPLEX)}{CPLEX} \times 100. \quad (8)$$

Essa comparação só pôde ser realizada com os problemas resolvidos com somente um único tipo de veículo (carreta), dado que o CPLEX não conseguiu obter nenhuma solução inteira para os problemas com dois tipos de veículos (*truck* e carreta), mesmo após um período de tempo 36 vezes maior que o máximo definido, ou seja, 18 horas de processamento. As soluções obtidas com a busca tabu para o problema com dois tipos de veículo (*truck* e carreta) são apresentadas na última coluna da tabela, com o título 'Tabu<sup>2</sup>'.

Analisando os resultados obtidos apresentados na Tabela 1, é possível verificar que a busca tabu foi capaz de obter as melhores soluções em todos os problemas, obtendo um desvio percentual médio, em relação às melhores soluções obtidas através do CPLEX, de -4,6%, tendo como desvio mínimo de -1,0% com o problema do mês de agosto, e máximo de -11,8% no problema de mês de abril.

As soluções obtidas com o CPLEX, mesmo para somente um único tipo de veículo, apresentaram um *gap* médio de 21,2%, confirmando a dificuldade de se resolver esta classe de problemas. Verificou-se também que, mesmo após 18 horas de processamento, o *gap* estava ainda acima de 15%. Como relatado anteriormente, para a instância correspondente ao mês de janeiro, após 18 horas de processamento, o

*gap* estava em 17,61%.

## 6. CONCLUSÕES

Esse artigo tratou do problema de carregamento de carga parcelada em uma rede de transporte do tipo *hub-and-spoke*. Foi proposto um modelo matemático para representar o problema, que foi inspirado em uma formulação apresentada para um problema similar conhecido na literatura como *network loading problem*, que trata especificamente da modelagem de problemas de configuração de redes de telecomunicações.

O modelo matemático proposto para representar o problema possui somente variáveis binárias e inteiras, dificultando a utilização de métodos exatos tradicionais, como pacotes comerciais de otimização, para sua solução, conforme evidenciaram os experimentos realizados, utilizando dados de um ano de operação de uma empresa transportadora de carga parcelada no Brasil. Com isso foi desenvolvida uma heurística baseada em busca tabu visando à obtenção de soluções de forma rápida e eficiente para o problema.

Os experimentos realizados compreenderam 12 problemas, que foram resolvidos tanto utilizando o pacote comercial CPLEX da IBM/ILOG (versão 9.1), como também com a heurística busca tabu proposta.

Os resultados obtidos evidenciaram a dificuldade de se obter soluções de qualidade, em um tempo de processamento aceitável, para esta classe de problemas. Mesmo para um tempo de processamento limitado em 30 minutos, a heurística proposta possibilitou obter resultados melhores que o modelo matemático, em média uma solução final 4,6%, mostrando ser uma alternativa interessante para solução desta classe de problemas, sendo simples de ser implementada computacionalmente, não necessitando de calibrações específicas de parâmetros para a obtenção de soluções de boa qualidade. É importante destacar ainda que para o caso especial em que são tratados mais de um tipo de veículo para a operação, no estudo de caso veículos do tipo *truck* e carreta, o CPLEX, mesmo após 18 horas de processamento, não obteve nenhuma solução inteira para nenhuma das 12 instâncias aqui testadas.

Isto é coerente com a expectativa das empresas transportadoras do setor, que almejam não só utilizar o modelo como uma ferramenta de planejamento tático, mas também avaliar diariamente possíveis modificações nas rotas a serem operadas em cada terminal, adicionando e/ou excluindo novas rotas, ou ajustando o tipo de veículo adequado pa-

Tabela 1. Resultados obtidos com o CPLEX e com a Busca Tabu

Mês	Term.	Cargas	Peso (kg)	Var. Int.	Var. Bin.	Restr.	Não-zeros	CPLEX <sup>1</sup>	GAP (%)	Tabu <sup>1</sup>	Tabu (%) <sup>1</sup>	Tabu <sup>2</sup>
JAN	51	195	854.929	725	141.325	152.045	562.325	51.241,4	22,4%	47.678,4	-7,0%	44.908,2
FEV	51	198	845.244	737	145.926	156.761	580.481	48.214,6	22,3%	46.999,4	-2,5%	42.790,0
MAR	51	191	948.822	736	140.576	151.053	559.220	50.591,8	17,8%	49.193,2	-2,3%	47.768,8
ABR	51	203	982.572	741	150.423	161.517	598.373	56.277,2	24,8%	49.648,2	-11,8%	49.329,0
MAI	51	192	1.009.790	731	140.352	150.875	558.299	54.451,6	18,5%	53.422,6	-1,9%	51.408,6
JUN	51	200	1.047.962	730	146.000	156.930	580.730	54.093,2	18,9%	52.348,8	-3,2%	50.483,2
JUL	52	200	1.011.689	756	151.200	162.356	601.556	54.385,8	22,0%	51.371,6	-5,5%	50.573,0
AGO	52	208	1.065.274	763	158.704	170.283	631.419	55.281,8	19,3%	54.733,0	-1,0%	53.030,2
SET	51	207	1.091.068	767	158.769	170.093	631.703	59.563,0	23,0%	57.120,4	-4,1%	54.262,2
OUT	52	207	1.144.837	784	162.288	173.836	645.796	61.901,0	19,5%	59.788,4	-3,4%	58.642,4
NOV	52	221	1.207.605	795	175.695	187.982	699.155	65.699,2	23,6%	61.663,0	-6,1%	63.092,4
DEZ	53	217	1.128.746	805	174.685	186.991	695.205	60.303,6	22,9%	56.998,2	-5,5%	56.020,6

ra cada rota, de acordo com o volume de cargas no dia.

Outro ponto importante a ressaltar é que o problema do dimensionamento da quantidade e tipos de veículos utilizados em cada rota, modelado como o problema conhecido na literatura como BPP, por si só já se constitui um problema complexo e o esforço para sua solução poderia representar um objeto de pesquisa.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Altin, A.; H. Yaman e M.C. Pinar (2010) A Hybrid Polyhedral Uncertainty Model for The Robust Network Loading Problem, April 2009, forthcoming in *Performance Models and Risk Management in Communication Systems*, Gulpinar, Harrison and Rustem (Eds.), Springer-Verlag.
- Avella, P.; S. Mattia e A. Sassano (2007) Metric inequalities and the network loading problem. *Discrete Optimization*, v. 4, p. 103–114.
- Babonneau, F.; J.P. Vial. (2010) A partitioning algorithm for the network loading problem. *European Journal of Operational Research*, v. 204, p. 173–179.
- Barahona, F. (1996) Network design using cut inequalities. *SIAM Journal of Optimization*, v. 6, n. 3, p. 823–837.
- Battiti, R. e G. Tecchiolli (1994) The reactive tabu search. *ORSA Journal on Computing*, v. 6, n. 2, p. 126–140.
- Berger, D.; B. Gendron; J-Y Potvin; S. Raghavan e P. Soriano (2000) Tabu search for a network loading problem with multiple facilities. *Journal of Heuristics*, v. 6, p. 253–267.
- Cunha, C. B. e M. R. Silva (2007) A genetic algorithm for the problem of configuring a hub-and-spoke network for a LTL trucking company in Brazil. *European Journal of Operational Research*, v. 179, p. 747–758.
- Dall’Orto, L.C.; T.G. Crainic; J.E. Leal e W.B. Powell (2006) The single-node dynamic service scheduling and dispatching problem. *European Journal of Operational Research*, v. 170, p. 1–23.
- Dell’amico, M.; A. Lodi e F. Maffioli (1999) Solution of the cumulative assignment problem with a well-structured tabu search method. *Journal of Heuristics*, v. 5, p. 123–143.
- Gallo, G. e S. Pallottino (1988) Shortest path algorithms *Annals of Operations Research*, v. 13, p. 3–79.
- Garey, M.R. e D.S. Johnson (1979) *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. New York, NY: W. H. Freeman e Co.
- Gendron, B.; J-Y. Potvin e P. Soriano (2002) Diversification strategies in local search for a nonbifurcated network loading problem. *European Journal of Operational Research*, v. 142, p. 231–241.
- Glover, F. (1986) Future paths for integer programming and links to artificial intelligence. *Computers & Operations Research*, v. 13, p. 533–49.
- Glover, F. (1989) Tabu search. Part i. *ORSA Journal on Computing*, v. 1, p. 1–190.
- Magnanti, T.L.; P. Mirchandani e R. Vachani (1993) The convex hull of two core capacitated network design problems. *Mathematical Programming*, v. 26, n. 2, p. 233–250.
- Magnanti, T.L.; P. Mirchandani e R. Vachani (1995) Modeling and solving the two-facility capacitated network loading problem. *Operations Research*, v. 43, n. 1, p. 142–157.
- Mirchandani, P. (2000) Projections of the capacitated network loading problem. *European Journal of Operational Research*, v. 122, n. 3, p. 534–560.
- Singleton, R. C. (1969) An efficient algorithm for sorting with minimal storage: Algorithm 347. *Communications of the ACM* 12, p. 185–187.
- Stecco, G.; J-F. Cordeau e E. Moretti (2009) A tabu search heuristic for a sequence-dependent and time-dependent scheduling problem on a single machine. *Journal of Scheduling*, v. 12, n. 1, p. 3–16.